PROJET 2

Important: Sauf mention contraire, toutes les questions devront être traitées à l'aide de Maple. De plus, sauf mention contraire, "entier" signifie ici "entier relatif".

1 Matrice symétriques

Dans cette section, n désigne un entier naturel non nul. Si R est un anneau commutatif unitaire[1], on note $M_n(R)$ (resp. $GL_n(R)$) l'ensemble des matrices carrées (resp. l'ensemble des matrices inversibles) d'ordre n à coefficients dans R. Le sous-ensembles de $M_n(R)$ des matrices symétriques (i.e. égale à leur transposée) est noté $S_n(R)$.

1.1 Matrices réelles

Question 1: Ecrire une procédure `EstSymétrique`(A) qui teste si une matrice A à coefficients réels est symétrique ou non.

Question 2: La *signature* d'une matrice symétrique réelle A est le couple (p, q) où p est le nombre (compté avec multiplicité) de valeurs propres strictement positives de A et q le nombre (compté avec multiplicité) de valeurs propres strictement négatives de A. Par exemple, la matrice identité d'ordre n est de signature $(n, 0)$. Ecrire une procédure `Signature`(A) qui renvoie la signature d'une matrice A.

Question 3: Soit A et B deux matrices de $S_n(R)$. On note $A \simeq B$ s'il existe une matrice P dans $GL_n(R)$ telle que $A = PBP^t$ (où P^t désigne la transposée de P). Démontrer (sur le dossier papier) que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

Question 4: Deux matrices symétriques **à coefficients réels** sont *équivalentes* (au sens de $\simeq$) si et seulement si elles ont la même signature. Ecrire une procédure `SontEquivalentes`(A,B) qui testent si deux matrices symétriques réelles A et B sont équivalentes ou non.

Question 5: Parmi les matrices symétriques réelles suivantes, lesquelles sont équivalentes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 6: Soit (p, q, n) un triplet d'entiers naturels tels que $p+q \leq n$. Ecrire une procédure `ClasseEquiv`(p, q, n) qui renvoie une matrice symétrique réelle d'ordre n et de signature (p, q).

1.2 Matrices à coefficients entiers

On a vu que pour deux matrices symétriques réelles, déterminer si elles sont équivalentes ou non est plutôt facile. Nous considérons dans la suite le cas $R = \mathbb{Z}$.

[1]Dans la suite, R sera soit le corps des réels $\mathbb{R}$, soit l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Question 7: Une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ est inversible dans $GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si elle est inversible dans $GL_n(\mathbb{R})$ et si son inverse est dans $M_n(\mathbb{Z})$. Déterminer quelles matrices de la question 5 sont inversibles en tant que matrices de $M_n(\mathbb{Z})$.

Question 8: Ecrire une procédure `EstMatriceEntiere`(A) qui vérifie si une matrice A a tous ses coefficients entiers relatifs. En déduire une procédure `InverseMatriceEntiere`(A) qui renvoie un message d'erreur si la matrice A de $M_n(\mathbb{Z})$ n'est pas inversible (utilisez la fonction `print` par exemple) et calcule son inverse dans le cas contraire. Tester cette dernière procédure sur les matrices de la question 5.

Une matrice symétrique (réelle ou entière) est *non dégénérée* si sa signature (p, q) vérifie $p + q = n$. Elle est *définie* si elle est non dégénérée et si $p = n$ ou $q = n$. Elle est *indéfinie* dans le cas contraire.

Question 9: Ecrire une procédure `EstNonDegeneree`(A) et une procédure `EstIndefinie`(A) qui testent respectivement si la matrice symétrique A est non dégénérée et indéfinie.

Question 10: Une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ est *paire* (ou de type II) si tous ses coefficients diagonaux sont pairs. Elle est *impaire* (ou de type I) dans le cas contraire. Ecrire une procédure `Type`(A) qui détermine le type d'une matrice symétrique à coefficients entiers.

Question 11: Déterminer le rang, la signature, le type des matrices de la question 5. Dire si elles sont dégénérée ou non, et si elles sont définies ou non.

Question 12: Un théorème de John Milnor[2] affirme que deux matrices symétriques entière non dégénérées et indéfinies sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang, même type et même signature. Ecrire une procédure `SontEquivalentesEntieres`(A,B) qui testent si deux matrices symétriques entières A et B sont équivalentes ou non.

Question 13: On note E_8 la matrice

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & -1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & -1 & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(les valeurs non indiquées sont nulles). Calculer son type, son rang et sa signature.

2 Réseau de $\mathbb{R}^2$

Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$. Le réseau engendré par (e_1, e_2) est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de e_1 et e_2. Par exemple, $\mathbb{Z}^2$ est le réseau engendré par la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Question 14: Soit $e1$ et $e2$ deux vecteurs linéairement indépendants et $r > 0$ un réel strictement positif. Ecrire une procédure `Reseau`($e1, e2, r$) qui dessine les éléments du réseau engendré par $(e1, e2)$ dont la norme est strictement inférieure à r, ainsi que le cercle de centre l'origine et de rayon r.

[2]John Milnor est un mathématicien américain né en 1931. Il a obtenu le prix Abel le 23 mars 2011, après avoir obtenu la médaille Fields en 1962.

Question 15: Soit A une matrice réelle inversible. Le réseau engendré par A est le réseau de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs colonnes de A. Ecrire une procédure `Reseau2`(A, r) qui dessine les points du réseau engendré par A dont la norme est strictement inférieure à r, ainsi que les vecteurs $e1$ et $e2$ et le cercle de centre l'origine et de rayon r.

Question 16: Appliquer la procédure `Réseau`(A, r) dans des cas où $\pi r^2 > 4|det(A)|$ et dans des cas où $\pi r^2 < 4|det(A)|$. Que remarque-t-on?

3 Théorèmes des carrés

Soit p un entier naturel. On cherche à décomposer p comme somme $p = a^2 + b^2$ de deux entiers naturels.

Question 17: Ecrire une procédure `DeuxCarres`(p) qui teste s'il est possible de décomposer p comme somme de deux carrés et renvoie (lorsque c'est possible) deux entiers naturels a et b tels que $p = a^2 + b^2$. Tester la procédure pour $p = 11$, $p = 13$, $p = 30$ et $p = 45$.

Question 18: On sait que si p est un nombre premier congru à 1 modulo 4, on peut le décomposer en une somme de deux carrés. Vérifier ce fait pour les nombres premiers congrus à 1 modulo 4 inférieur à 10.000. Déterminer aussi la liste des 100 premiers entiers naturels décomposables en somme de deux carrés.

Question 19: Ecrire une procédure `QuatreCarres`(p) qui décomposent un entier naturel en une somme de 4 carrés[3]. Tester la procédure sur les entiers naturels inférieurs à 50.

Question 20: Déterminer le plus petit entier naturel qui ne peut pas être décomposé en une somme de trois carrés.

[3]Un théorème de Lagrange affirme que c'est toujours possible